2.2.1 ~~(3)~~ 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2\\3&-1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}4&1\\0&2\end{pmatrix}$ 求：

(3) $(A+B)(A-B)-(A+2B)(B-A)$

$= (A+B)(A-B)+(A+2B)(A-B)$

$= (3B+2A)(A-B)$

$= \begin{pmatrix}5&3\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1\\2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6&-2\\4&3\end{pmatrix}$

(4) $A(B+C-D)$

$= \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\3&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&1\\0&2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&2\\2&-3\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}-2&2\\0&-1\end{pmatrix}$

2.2.2 求下列矩阵的乘积

(1) $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\0&3&-2\\-1&4&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot1+1\cdot0+1\cdot(-1) & 1\cdot2+1\cdot3+1\cdot4 & 1\cdot2+1\cdot(-2)+1\cdot3\\ 2\cdot1+1\cdot0+3\cdot(-1) & 2\cdot2+1\cdot3+3\cdot4 & 2\cdot2+1\cdot(-2)+3\cdot3\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}0&9&3\\-1&19&11\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&2&-1\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&3\\2&4&0\\0&-2&6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&9&3\\3&11&-3\\0&0&24\end{pmatrix}$

2.2.3 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-3&-2&1\\1&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&3&1\\2&4&5\end{pmatrix}$

(1) 若 X 满足 $A+X=B$; 求 X

解: $A+X=B \Leftrightarrow X=B-A=\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&3&1\\2&4&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&3\\-3&-2&1\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-3&-1\\5&5&0\\1&2&4\end{pmatrix}$

(2) 若 Y 满足 $(2A-Y)+3(B-Y)=0$, 求 Y

解: 有 $2A-Y+3B-3Y=0 \Rightarrow Y=\frac{1}{2}A+\frac{3}{4}B=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\-3&-2&1\\1&2&1\end{pmatrix}+\frac{3}{4}\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&3&1\\2&4&5\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&3\\0&\frac{5}{4}&\frac{5}{4}\\2&4&\frac{17}{4}\end{pmatrix}$

2.2.6 设 A 为4阶方阵，且已知 $|A|=-128$，求 $|-\frac{1}{2}A|$

解: $|-\frac{1}{2}A| = (-\frac{1}{2})^4\cdot|A| = \frac{1}{16}\cdot(-128) = -8$

2.2.7 化下列矩阵为阶梯形矩阵,并求出他们的秩:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+3R_1]{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 为阶梯形矩阵

非零行数为3，故秩为3

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2-R_1]{R_3-R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{R_3-3R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ 非零行为3 故秩为3

(5) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & 12 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -5 \\ -4 & 3 & 12 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -5 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & 12 & 10 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[R_2-2R_1]{R_3+4R_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 2 & 12 \\ 0 & -9 & 12 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+2R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 16 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 16 & 14 \\ 0 & 5 & \cancel{8}\,2 & 12 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{R_3-5R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 16 & 14 \\ 0 & 0 & -78 & -58 \end{pmatrix}$ 故秩为3

2.2.8 求下列矩阵的逆:

(1) $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$

$$(A\ I_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&2&2&0&1&0\\1&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_2\times\frac{1}{2}]{R_3-R_1}\left(\begin{array}{cccccc}1&1&-1&1&0&0\\0&1&1&0&\frac{1}{2}&0\\0&-2&1&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3+2R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc}1&1&-1&1&0&0\\0&1&1&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&3&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_1-R_2]{R_3\times\frac{1}{3}}\left(\begin{array}{cccccc}1&0&-2&1&-\frac{1}{2}&0\\0&1&1&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right)\xrightarrow[R_2-R_3]{R_1+2R_3}\left(\begin{array}{cccccc}1&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{2}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right)$$

故 $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

(5) $A=\begin{pmatrix}2&5&7\\6&3&4\\5&-2&-3\end{pmatrix}$

$$(A\ I_3)=\left(\begin{array}{cccccc}2&5&7&1&0&0\\6&3&4&0&1&0\\5&-2&-3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_1\leftrightarrow R_2]{R_2-R_3}\left(\begin{array}{cccccc}1&5&7&0&1&-1\\2&5&7&1&0&0\\5&-2&-3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3-5R_1]{R_2-2R_1}\left(\begin{array}{cccccc}1&5&7&0&1&-1\\0&-5&-7&1&-2&2\\0&-27&-38&0&-5&6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2\times(-\frac{1}{5})]{R_1+R_2}\left(\begin{array}{cccccc}1&0&0&1&-1&1\\0&1&\frac{7}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{2}{5}\\0&-27&-38&0&-5&6\end{array}\right)\xrightarrow{R_3+27R_2}\left(\begin{array}{cccccc}1&0&0&1&-1&1\\0&1&\frac{7}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{2}{5}\\0&0&-\frac{1}{5}&-\frac{27}{5}&\frac{29}{5}&-\frac{24}{5}\end{array}\right)\xrightarrow[R_2-\frac{7}{5}R_3]{R_3\times(-5)}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc}1&0&0&1&-1&1\\0&1&0&-38&41&-34\\0&0&1&27&-29&24\end{array}\right)$$

故 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-38&41&-34\\27&-29&24\end{pmatrix}$

(7) $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{pmatrix}$

$$(A\ I_3)=\left(\begin{array}{cccccc}1&0&2&1&0&0\\2&-1&3&0&1&0\\4&1&8&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_2-2R_1]{R_3-4R_1}\left(\begin{array}{cccccc}1&0&2&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&1&0&-4&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_2\times(-1)]{R_3+R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&1&2&-1&0\\0&0&-1&-6&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_2+R_3,\ R_3\times(-1)]{R_1+2R_3}\left(\begin{array}{cccccc}1&0&0&-11&2&2\\0&1&0&-4&0&1\\0&0&1&6&-1&-1\end{array}\right)$$

故 $A^{-1}=\begin{pmatrix}-11&2&2\\-4&0&1\\6&-1&-1\end{pmatrix}$

2.2.9 解下列矩阵方程

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

构造矩阵：$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2-3R_1 \\ R_3-2R_1}]{R_1\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -2 & -\frac{9}{2} & -\frac{21}{2} \\ 0 & -2 & 1 & -2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+2R_2]{R_2\times(-\frac{2}{3})}$

$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 3 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 2 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2+\frac{1}{3}R_3]{R_3\times 3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 33 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1-\frac{1}{2}R_2]{R_1-\frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 & -23 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 33 \end{pmatrix}$

故 $X = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -23 \\ 2 & 5 & 18 \\ 2 & 6 & 23 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

构造矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1\leftrightarrow R_3]{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2-3R_1]{R_3-2R_1}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -3 & -18 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -1 & -36 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & -9 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[R_3\times(-1)]{R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -1 & -36 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 45 \end{pmatrix}$ 故 X 为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 6 & -1 & -36 \\ -8 & 0 & 45 \end{pmatrix}$

2.2.10. 3 阶矩阵 A 的逆矩阵为：$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

求 (1) $|A|$; (2) A; (3) $(A^T)^{-1}$ (4) $(\frac{1}{2}A)^{-1}$;

解：(1) $|I_3| = |A\cdot A^{-1}| = |A|\cdot|A^{-1}| = I_3$ 故 $|A| = \frac{1}{|A^{-1}|}$

$|A^{-1}| = 1\cdot 2\cdot 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 1 = 2$ 故 $|A| = \frac{1}{2}$

(2) 求 A, $A=(A^{-1})^{-1}$

故 $(A\ I_3)=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&2&-1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2+R_3]{R_1-R_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&-1\\0&2&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\times\frac{1}{2}}$

$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&-1\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$ 故 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$

(3) $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T=\cancel{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\-1&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}}\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$

(4) $(\frac{1}{2}A)^{-1}\cdot(\frac{1}{2}A)=I_3\Rightarrow(\frac{1}{2}A)^{-1}=2A^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&-2\\0&0&2\end{pmatrix}$

2.2.12. 已知:

$B=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ 且 $(2I_4-C^{-1}B)A=C^{-1}$, 求A

解: 已知 $(2I_4-C^{-1}B)A=C^{-1}$

则 $C\cdot(2I_4-C^{-1}B)A=C\cdot C^{-1}$

则 $(2C-B)A=I_4$ 故 $A=(2C-B)^{-1}$

设 $D=2C-B=\begin{pmatrix}2&4&0&2\\0&2&4&0\\0&0&2&4\\0&0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

而 $A=D^{-1}$

构造 $(D\ I_4)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&1&2&3&0&1&0&0\\0&0&1&2&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3-R_4]{R_1-R_2,\ R_2-R_3}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&-1&0&0\\0&1&1&1&0&1&-1&0\\0&0&1&1&0&0&1&-1\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[R_3-R_4]{R_1-R_2,\ R_2-R_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&-2&1&0\\0&1&0&0&0&1&-2&1\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$ 故 $A=D^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$